| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN | KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH |
|---|---|
| **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **MÔN THI: TOÁN** |
| *(Đề thi có 01 trang)* | **NGÀY THI: 17/4/2019** |
| | **THỜI GIAN: 150 phút** *(không kể thời gian giao đề)* |

***Lưu ý: thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay***

**Câu 1**: *(4,0 điểm)*

a) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.

b) Cho ba số dương $x, y, z$ thoả mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 673$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{x^2-yz+2019}+\dfrac{y}{y^2-zx+2019}+\dfrac{z}{z^2-xy+2019}\geq\dfrac{1}{x+y+z}$.

**Câu 2**: *(5,0 điểm)*

a) Do bị bệnh bại não nên tay chân của Cảnh (11 tuổi, bản Tà Ọt, xã Châu Hạnh, huyện Quỳnh Châu, tỉnh Nghệ An) bị co quắp, không đi lại được từ lúc mới chào đời. Lên 6 tuổi, nhìn bạn bè cắp sách đến trường em cũng muốn mẹ cho đi học. Thương con ham học, những ngày đầu Cảnh được người thân cõng đến trường. Ít ngày sau, chứng kiến cảnh người thân của bạn phải vất vả bỏ bê công việc, Khanh đã quyết định cõng bạn vượt qua con đường dài 1,8 km nhiều sỏi đá để tới trường.

Lúc về, trên quãng đường dài 1,8 km, trời nắng, Khanh cõng bạn với vận tốc ít hơn lúc đi 0,2 m/s. Do đó, thời gian cõng bạn lúc về của Khanh chậm hơn lúc đi là 12 phút 30 giây. Tính vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3=2x+y \\ y^3=2y+x \end{cases}$.

**Câu 3**: *(5,0 điểm)*

Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ đường tròn tâm $K$ đường kính $BC$ cắt các cạnh $AB, AC$ lần lượt tại các điểm $F, E$. Gọi $H$ là giao điểm của $BE$ và $CF$.

a) Chứng minh $OA$ vuông góc $EF$.

b) Từ $A$ dựng các tiếp tuyến $AM, AN$ với đường tròn $(K)$ ($M, N$ là các tiếp điểm và $N$ thuộc cung nhỏ $EC$). Chứng minh rằng: $M, H, N$ thẳng hàng.

**Câu 4**: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác đều $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$, điểm $M$ di động trên cung nhỏ $BC$. Xác định vị trí của $M$ để $S=MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất và khi đó tính $S$.

**Câu 5**: *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$. Từ một điểm $C$ thuộc đường tròn $(O)$ kẻ $CH$ vuông góc $AB$ ($C$ khác $A$ và $B$; $H$ thuộc $AB$). Đường tròn tâm $C$ bán kính $CH$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$ và $E$. Chứng minh $DE$ đi qua trung điểm của $CH$.

**……………….HẾT……………..**

*Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:……………………………………………………..Số báo danh:……………….

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO** **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH**
**LONG AN** **MÔN THI: TOÁN**
**NGÀY THI: 17/4/2019**

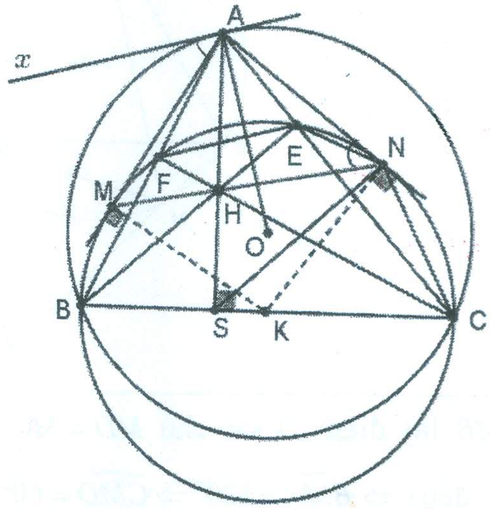
# HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

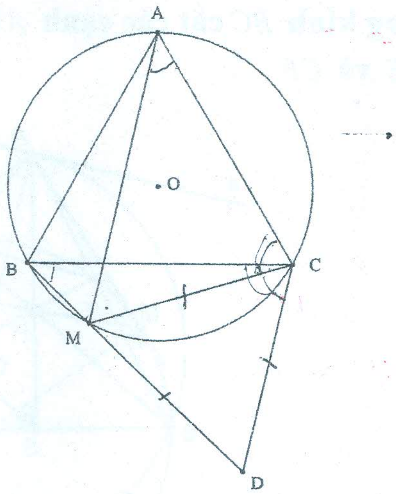
*(Hướng dẫn và biểu điểm chấm gồm 05 trang )*

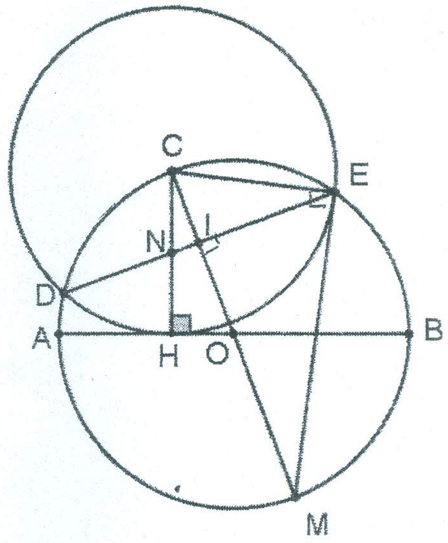
| Câu | Nội dung | Điểm |
|---|---|---|
| **1a** *(2điểm)* | **Rút gọn biểu thức:** $A=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$. | |
| | $A=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}}$ <br> (*Lưu ý: mỗi ý phân tích hằng đẳng thức được 0,25*) | 1,0 |
| | $=\dfrac{\sqrt{3}-\left\|\sqrt{2}+\sqrt{3}\right\|-\left\|3-\sqrt{2}\right\|}{\sqrt{2}-\left\|\sqrt{5}+1\right\|+\left\|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right\|}$ Khỏi cần dòng 2 | 0,25 |
| | $=\dfrac{\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(3-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}-\left(\sqrt{5}+1\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}$ | 0,25 |
| | $=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}-1+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ | 0,25 |
| | $=3$. | 0,25 |
| **1b** *(2điểm)* | **Cho ba số dương** $x, y, z$ **thoả mãn điều kiện:** $xy+yz+zx=673$. <br> **Chứng minh rằng:** $\dfrac{x}{x^2-yz+2019}+\dfrac{y}{y^2-zx+2019}+\dfrac{z}{z^2-xy+2019}\geq\dfrac{1}{x+y+z}$. | |
| | Chứng minh bất đẳng thức: o đk o chấm cả bài <br> $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) với $a, b, c\in R$ và $x, y, z>0$ <br> Với $a, b\in R$ và $x, y>0$ ta có: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\geq\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$ (**) <br> $\Leftrightarrow\left(a^2y+b^2x\right)(x+y)\geq xy(a+b)^2\Leftrightarrow(bx-ay)^2\geq0$ (luôn đúng) <br> Áp dụng bất đẳng thức (**), ta có: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\geq\dfrac{(a+b)^2}{x+y}+\dfrac{c^2}{z}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ | 0,25 |
| | Vì: $xy+yz+zx=673$ nên $x\left(x^2-yz+2019\right)=x\left(x^2+xy+zx+1346\right)>0$. <br> Tương tự: $y\left(y^2-zx+2019\right)>0$ và $z\left(z^2-xy+2019\right)>0$ | 0,25 |

Khỏi cần x, y, z chỉ cần
Nên tốn bất o cần cm.

| | | |
|---|---|---|
| | Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:<br>$\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}$<br>$=\frac{x^2}{x\left(x^2-yz+2019\right)}+\frac{y^2}{y\left(y^2-zx+2019\right)}+\frac{z^2}{z\left(z^2-xy+2019\right)}$ (0,25đ)<br>$\geq\frac{(x+y+z)^2}{x^3+y^3+z^3-3xyz+2019(x+y+z)}$ (1) (0,25đ) | 0,5 |
| | Biến đổi: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$<br>$=(x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xy(x+y+z)$<br>$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)$ | 0,25 |
| | Từ đó suy ra: $x^3+y^3+z^3-3xyz+2019(x+y+z)$<br>$=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3.673\right)$<br>$=(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx+3.(xy+yz+zx)\right]$<br>$=(x+y+z)(x+y+z)^2=(x+y+z)^3$ (2) | 0,25 |
| | Từ (1) và (2) suy ra<br>$\frac{x}{x^2-yz+2019}+\frac{y}{y^2-zx+2019}+\frac{z}{z^2-xy+2019}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3}=\frac{1}{x+y+z}$ (đpcm). | 0,5 |
| 2a<br>*(2,5điểm)* | **Khanh đã quyết định cõng bạn vượt qua con đường dài 1,8 km toàn sỏi đá để tới trường. Lúc về, trên quãng đường dài 1,8 km, trời nắng, Khanh cõng bạn với vận tốc ít hơn lúc đi 0,2 m/s. Do đó, thời gian cõng bạn lúc về của Khanh chậm hơn lúc đi là 12 phút 30 giây. Tính vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh.** | |
| | Gọi x (m/s) là vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh. (Khỏi cần đơn vị) | 0,25 |
| | Điều kiện $x > 0,2$ | 0,25 |
| | Vận tốc lúc cõng bạn về của Khanh là $x-0,2$ | 0,25 |
| | Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{1800}{x-0,2}-\frac{1800}{x}=750$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow 750x^2-150x-360=0$ (hay $25x^2-5x-12=0$) | 0,5 |
| | Giải phương trình ta được $x_1=0,8$ (nhận); $x_2=-0,6$ (loại) mỗi $x_1$ 0,25 $x_2$ 0,25 | 0,5 |
| | Vậy vận tốc lúc cõng bạn đi của Khanh là 0,8 (m/s). Khi đổi vị cả bảng (−0,5đ) | 0,25 |
| 2b<br>*(2,5điểm)* | **Giải hệ phương trình:** $\begin{cases}x^3=2x+y\\y^3=2y+x\end{cases}$. | |
| | $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=x-y\\x^3+y^3=3(x+y)\end{cases}$ | 0,25 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=x-y\\(x+y)(x^2-xy+y^2)=3(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-1)=0\\(x+y)(x^2-xy+y^2-3)=0\end{cases}$ | 0,25 |
| | Th1: $\begin{cases}x-y=0\\x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ | 0,25 |
| | Th2: $\begin{cases}x-y=0\\x^2-xy+y^2-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\x^2-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}, y=\sqrt{3} \text{ — } 0{,}25\\x=-\sqrt{3}, y=-\sqrt{3} \text{ — } 0{,}25\end{array}\right.$ | 0,5 |
| | Th3: $\begin{cases}x^2+xy+y^2-1=0\\x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y\\x^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=-1 \text{ — } 0{,}25\\x=-1, y=1 \text{ — } 0{,}25\end{array}\right.$ | 0,5 |
| | Th4: $\begin{cases}x^2+xy+y^2-1=0\\x^2-xy+y^2-3=0\end{cases}$<br>Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=x.y\end{cases}$ $(S^2-4P\geq 0)$ ta có hệ $\begin{cases}S^2-P-1=0\\S^2-3P-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P=-1\\S=0\end{cases}$<br>HS làm cách ≠ tìm 1 bộ (x;y) đạt (0,5đ)<br>Khi đó $\begin{cases}x+y=0\\x.y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=-1\\x=-1, y=1\end{array}\right.$ | 0,5 |
| | Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình là: $(0;0)$; $(\sqrt{3};\sqrt{3})$; $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$; $(1;-1)$; $(-1;1)$. | 0,25 |
| 3<br>*(5điểm)* | **Cho tam giác $ABC$ có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Vẽ đường tròn tâm $K$ đường kính $BC$ cắt các cạnh $AB$, $AC$ lần lượt tại các điểm $F$, $E$. Gọi $H$ là giao điểm của $BE$ và $CF$.**<br> | |
| 3a<br>*(2điểm)* | **Chứng minh $OA$ vuông góc $EF$.** | |
| | Dựng tiếp tuyến $Ax$ của $(O)$. Ta có:<br>$\widehat{ACB}=\widehat{BAx}$ (hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) | 0,5 |
| | $\widehat{ACB}=\widehat{AFE}$ (cùng bù với $\widehat{BFE}$, do tứ giác $BFEC$ nội tiếp) | 0,5 |
| | $\Rightarrow \widehat{BAx}=\widehat{AFE} \Rightarrow Ax \mathbin{//} EF$ | 0,5 |
| | Mà $OA \perp Ax \Rightarrow OA \perp EF$. | 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| **3b** *(3điểm)* | **Chứng minh rằng:** $M, H, N$ **thẳng hàng.** | |
| | $\Delta ABC$ có $BE, CF$ là hai đường cao và $H$ là trực tâm. | 0,25 |
| | Kẻ đường cao thứ 3 là $AS$ của $\Delta ABC$ <br> $M, N, S$ cùng thuộc đường tròn đường kính $AK$. | 0,25 |
| | $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ASN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $AN$). | 0,25 |
| | Mà $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ ($\Delta AMN$ cân vì $AM = AN$ theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). | 0,25 |
| | Do đó $\widehat{ANM} = \widehat{ASN}$ (1) | 0,25 |
| | Ta có: $\Delta ANE$ đồng dạng $\Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow AN^2 = AE.AC$ | 0,25 |
| | $\Delta AEH$ đồng dạng $\Delta ASC$ (g.g) $\Rightarrow AH.AS = AE.AC$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow AN^2 = AH.AS$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow \dfrac{AN}{AH} = \dfrac{AS}{AN} \Rightarrow \Delta ASN$ đồng dạng $\Delta ANH$ (c.g.c) | 0,25 |
| | $\Rightarrow \widehat{ANH} = \widehat{ASN}$ (2) | 0,25 |
| | Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ANH}$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow M, H, N$ thẳng hàng. | 0,25 |
| **4** *(3 điểm)* | **Cho tam giác đều** $ABC$ **nội tiếp đường tròn** $(O;R)$, $M$ **di động trên cung nhỏ** $BC$. **Xác định vị trí của** $M$ **để** $S = MA + MB + MC$ **đạt giá trị lớn nhất và khi đó tính** $S$. <br>   | |
| | Trên tia đối của $MB$ lấy điểm $D$ sao cho $MD = MC$ <br> $\widehat{BAC} = 60^o$ ($\Delta ABC$ đều) $\Rightarrow \widehat{BMC} = 120^o \Rightarrow \widehat{CMD} = 60^o$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow \Delta MCD$ đều $\Rightarrow CM = CD$ | 0,5 |
| | c/m <br> $\Delta ACM = \Delta BCD$ (c.g.c) | 0,5 |
| | $\Rightarrow AM = BD$ | 0,25 |
| | Mà $BD = MB + MD = MB + MC$ | 0,25 |
| | $\Rightarrow S = MA + MB + MC = 2MA$ | 0,5 ~~0,25~~ |
| | Mà $AM \le 2R$ | 0,25 0,5 |

| | | |
|---|---|---|
| | Vậy $S$ đạt giá trị lớn nhất khi $MA$ là đường kính $\Leftrightarrow$ $M$ là điểm chính giữa của cung nhỏ $BC$. | 0,25 |
| | Khi đó $S = 2.2R = 4R$. | 0,25 |
| **5** *(3 điểm)* | **Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$. Từ một điểm $C$ thuộc đường tròn $(O)$ kẻ $CH$ vuông góc $AB$ ($C$ khác $A$ và $B$; $H$ thuộc $AB$). Đường tròn tâm $C$ bán kính $CH$ cắt đường tròn $(O)$ tại $D$ và $E$. Chứng minh $DE$ đi qua trung điểm của $CH$.**   | |
| | Vẽ đường kính $CM$ của đường tròn $(O)$. Gọi $N, I$ lần lượt là giao điểm của $DE$ với $CH$ và $CM$. (o cần gọi)<br>$(O)$ và $(C)$ cắt nhau tại $D, E \Rightarrow OC \perp DE$ (Hs đây nói tên)<br>0,25 | 0,25 |
| | $\Delta CEM$ vuông tại $E$, $EI$ là đường cao nên $CE^2 = CI.CM$ | 0,5 |
| | Mà $CM = 2CO$ và $CE = CH$ nên $CH^2 = 2CI.CO$ hay $\frac{CH^2}{2} = CI.CO$ (1) | 0,5 |
| | $\Delta CIN$ đồng dạng $\Delta CHO$ (g.g) | 0,25 |
| | $\Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{CN}{CO} \Rightarrow CN.CH = CI.CO$ (2) | 0,5 |
| | Từ (1), (2) suy ra $CH = 2CN$ | 0,5 |
| | $\Rightarrow$ $N$ là trung điểm của $CH$. | 0,25 |
| | Vậy $DE$ đi qua trung điểm của $CH$. | 0,25 |

**Lưu ý:** *Học sinh giải cách khác mà đúng thì cho điểm tương ứng.*

……………..HẾT……………